

Das Problem der Dido: Das passt auf keine Kuhhaut!

Andreas de Vries

1 Das Problem

Das Problem der Dido hat seinen Ursprung in den Sagen der Antike. Dido (punisch für „Jungfrau“) hieß ursprünglich Elissa und war die Prinzessin von Tyros (im heutigen Libanon). Sie flüchtete im Jahre 814 v. Chr. vor ihrem eigenen Bruder an die Küste Libyens in Nordafrika. „Hier erkaufte sie anfangs nur ein Stück Landes, welches *Byrsa* oder Stierhaut genannt wurde; mit diesem Namen aber verhielt es sich so: Dido, in Afrika angekommen, verlangte nur so viel Feldes, als sie mit einer Stierhaut zu umspannen vermochte. Diese Haut aber schnitt sie in so dünne Riemen, dass dieselbe den ganzen Raum einschloss, den jetzt Byrsa, die Burg Karthagos, einnimmt.“[5] Daher kommt die Redewendung „Das passt auf keine Kuhhaut.“

Die Frage ist nun: In welche geometrische Form legt Dido die Riemen, um eine möglichst große Fläche zu umspannen? Mathematisch formuliert ist dies das „Problem der Dido“ oder das „isoperimetrische Problem“ [4, §6], von griech. *iso* „gleich“ und *perimeter* „Umfang“.

2 Lösung mit Steiner-Symmetrisierung

Der Schweizer Mathematiker Jakob Steiner lehrte Mitte des 19. Jahrhunderts in Berlin. Er bewies 1836 die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises mit geometrischen



Abbildung 1: Jakob Steiner (1796 – 1863)

Mitteln. Für diesen Beweis benötigt man den Begriff der „konvexen“ Kurve. Eine geschlossene ebene Kurve ohne Selbstüberschneidungen hat stets ein Inneres. Die Kurve

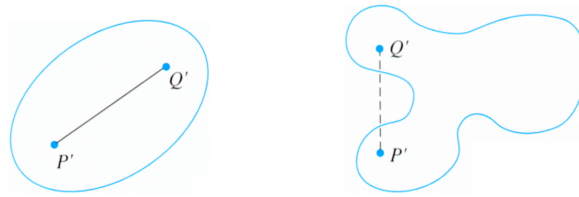


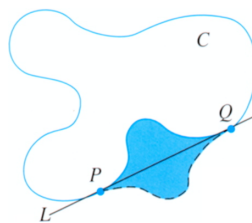
Abbildung 2: Links ist eine konvexe, rechts eine nichtkonvexe Kurve. In konvexen Kurven befindet sich jede Verbindungsgerade zweier Punkte des Innern komplett innerhalb der Kurve. Quelle: [4]

heißt *konvex*, wenn für zwei beliebige Punkte im Inneren auch deren geradlinige Verbindung vollständig im Inneren liegt, vgl. Abbildung 2.

Theorem 2.1 („Isoperimetrische Eigenschaft des Kreises“) *Unter allen möglichen geschlossenen Kurven gegebener Länge L ist diejenige, deren Innengebiet den größtmöglichen Flächeninhalt besitzt, die Kreislinie.*

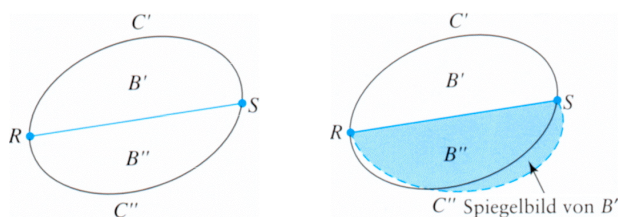
Beweis. Wir gehen davon aus, dass eine Lösung des isoperimetrischen Problems überhaupt *existiert*. (Das dürfen wir streng genommen nicht, aber die Existenz einer Lösung kann bewiesen werden; dieser Beweis allerdings würde den Rahmen dieses Beitrags sprengen.) Dann gibt es also eine Kurve C , die unter allen möglichen Kurven gegebener Länge die größte Fläche einschließt. Wir zeigen, dass die Kurve C ein Kreis sein muss. Der Beweis verläuft in drei Schritten. (Die Grafiken stammen aus [4].)

(i) *Das Innere der Kurve ist notwendig konvex.* Wäre C nicht konvex, so könnte man durch zwei geeignete Punkten P und Q auf C eine Gerade L legen, so dass C auf einer Seite von L und bis auf P und Q außerhalb von L liegt; spiegelt man an ihr das Teilstück von C zwischen P und Q ,



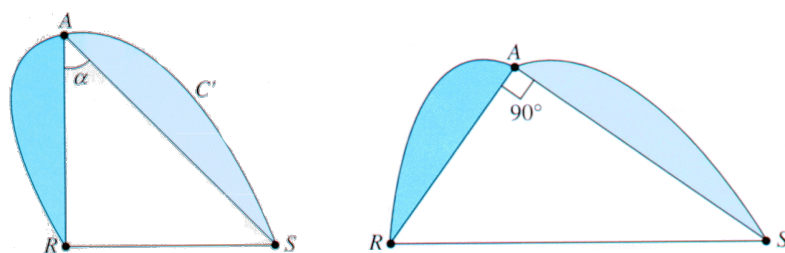
so erhielte man eine neue Kurve, die genau so lang wie C wäre, jedoch einen größeren Flächeninhalt hätte.

(ii) *Halbiert eine Gerade die Kurve in zwei gleich lange Teilstücke, so halbiert sie auch den Flächeninhalt.*



Wählen wir zwei Punkte R und S auf der als konvex erkannten Kurve C , um diese in zwei gleich lange Bögen C' und C'' zu zerlegen. Die Gerade durch R und S zerschneidet dann das Innere von C in zwei Stücke B' und B'' . Nehmen wir an, eine der beiden Flächenstücke wäre größer als das andere, z.B. B' . Spiegeln wir dann B' an der Geraden, so entstünde ein neues Gebiet, das schraffierte Spiegelbild von B' . Die Vereinigung von B' mit seinem Spiegelbild ergäbe dann eine Fläche, die größer als das Innere von C wäre — der Rand jedoch hätte die gleiche Länge wie C . Damit wäre C nicht optimal.

(iii) *Die beiden Bögen C' und C'' sind Halbkreise.* Sei A ein beliebiger Punkt auf einem der beiden Bögen, etwa C' , mit den Endpunkten R und S .



Denken wir uns jetzt die Seiten AR und AS beweglich um ein Gelenk, das im Punkt A angebracht ist, so dass wir den Öffnungswinkel α vergrößern oder verkleinern können. Wenn zudem die beiden, in der Abbildung farbig dargestellten, sichelförmigen Flächenstücke fest mit den Gelenkarmen verbunden sind, so bewegen sie sich bei jeder Winkeländerung mit. Nun gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks RAS nach der Höhenformel ([6], §3.2.1.1)

$$F = \frac{1}{2} \cdot \overline{RA} \cdot \overline{AS} \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

D.h., der Flächeninhalt ist genau dann maximal, wenn $\alpha = 90^\circ$, ohne dass die Länge von C' sich ändert. Da das für jeden Punkt A auf C' gilt, ist mit dem Satz von Thales C' ein Halbkreis. $\square$

3 Lösung mit Fourier-Reihen

Wir formulieren das Problem der Dido etwas exakter:

Problem der Dido. Gesucht ist eine geschlossene, reguläre und stückweise glatte Kurve Γ_* in der Ebene $\mathbb{R}^2$, deren Inneres maximalen Flächeninhalt bei gegebener Kurvenlänge L hat.

Hierbei gelten folgende formale Definitionen:

Definition 3.1 Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine in der Ebene. Dann ist $f = (f_1, f_2)$ ein Vektor von Funktionen $f_i : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Die Kurve heißt *(stetig) differenzierbar*, wenn beide Funktionen f_1, f_2 (stetig) differenzierbar sind.

(ii) f heißt *regulär*, wenn für die Ableitung $\dot{f}$ überall da, wo sie existiert, gilt: $0 < \|\dot{f}(t)\| < \infty$. Hierbei ist

$$\|\dot{f}(t)\| = \sqrt{\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t)} \quad (2)$$

(iii) f heißt *geschlossen*, wenn sie stetig ist und wenn gilt: $f(0) = f(2\pi)$, sonst immer $f(s) \neq f(t)$ falls $s \neq t$.

(iv) f heißt *stückweise glatt*, wenn f bis auf höchstens endlich viele Punkte überall stetig differenzierbar ist. Meist bezeichnet man auch das Bild $\Gamma = \{f([0, 1])\} \subset \mathbb{R}^2$ kurz als *Kurve*, und abgrenzend dazu die Abbildung f als *Parametrisierung* von Γ . Für Details siehe [1, 3]. $\square$

Ist f eine Kurve, so ist ihre *Länge* (oder: *Bogenlänge*) L gegeben durch

$$L = \int_0^{2\pi} \|\dot{f}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t)} dt, \quad (3)$$

also mit dem Integral über die „Geschwindigkeit“, vgl. [3, §4, (4.4) und Satz 1]. Eine reguläre geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve hat stets ein Inneres, das sie umschließt und dessen Flächeninhalt A gegeben ist durch

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (f_1(t)\dot{f}_2(t) - \dot{f}_1(t)f_2(t)) dt. \quad (4)$$

Beispiel 3.2 Der Rand eines n -Polygons Γ_n ist eine geschlossene, reguläre und stückweise glatte Kurve. Wenn Didos Riemen von endlich vielen Leuten aufgespannt würde, wäre das eine solche Kurve. $\square$

Beispiel 3.3 Es sei $r > 0$. Ein Kreis vom Radius r wird beschrieben durch die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto f(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Hier ist $f_1(t) = r \cos t$ und $f_2(t) = r \sin t$, und $\dot{f}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, und daher $\|\dot{f}(t)\| = r$, vgl. [3, §4, (4.7)] Die Länge L und die Fläche A betragen also

$$L = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r, \quad A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi r^2.$$

Insbesondere ist $L^2/(4\pi) = A$. $\square$

Theorem 3.4 Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, reguläre und stückweise glatte Kurve. Dann gilt für den Flächeninhalt A des Inneren von Γ die „isoperimetrische Ungleichung“

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}. \quad (5)$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn Γ ein Kreis vom Radius $r = L/2\pi$ ist.

Beweis. Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ eine Parametrisierung von Γ , periodisch auf dem Intervall $[0, 1]$. Dann können f_1 und f_2 auf eindeutige Weise durch Fourier-Reihen dargestellt werden [2, §23 Satz 3]:

$$f_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \quad f_2(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos kt + d_k \sin kt. \quad (6)$$

Das liefert die Ableitungen

$$\dot{f}_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt), \quad \dot{f}_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(d_k \cos kt - c_k \sin kt). \quad (7)$$

Mit den Orthogonalitätsbedingungen (12) in Lemma 3.5 erkennt man, dass von allen Produkten nur die quadratischen Terme $\int_0^{2\pi} \cos^2 kt \, dt$ und $\int_0^{2\pi} \sin^2 kt \, dt$ nicht verschwinden, so dass

$$\int_0^{2\pi} \dot{f}_1^2(t) \, dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2), \quad \int_0^{2\pi} \dot{f}_2^2(t) \, dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(c_k^2 + d_k^2).$$

Dann gilt mit (3) für die Länge L der Kurve

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2). \quad (8)$$

Wegen $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \dot{f}_2(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{c_0}{2} \dot{f}_1(t) \, dt = 0$ gilt mit (4) für den Flächeninhalt

$$A = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k d_k - b_k c_k) - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k c_k - a_k d_k) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k d_k - b_k c_k). \quad (9)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) - 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k d_k - b_k c_k) \\ &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(ka_k - d_k)^2 + (kb_k + c_k)^2 + (k^2 - 1)(c_k^2 + d_k^2)] \geq 0. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung sieht man am besten, wenn man „zurück rechnet“, also die Klammern alle ausmultipliziert. Die letzte Ungleichung gilt, da die Summe innerhalb der eckigen Klammern neben dem Ausdruck $(k^2 - 1) \geq 0$ ausschließlich quadratische Terme enthält. Damit folgt $A \leq L^2/(4\pi)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn

- für $k > 1$ gilt: $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$ (denn es *muss* $c_k^2 = -d_k^2$ gelten, d.h. $c_k = d_k = 0$, sowie $ka_k = d_k$ und $kb_k = c_k$);
- für $k = 1$ gilt: $a_1 = d_1$, $b_1 = -c_1$.

Das bedeutet, dass $f(t) = (\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t)$. Da damit $\|f(t) - (\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2})\|^2 = a_1^2 + b_1^2$ folgt, beschreibt die Kurve $f(t)$ einen Kreis vom Radius $r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ um den Mittelpunkt $(\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2})$. Mit (8) ist $L^2 = 4\pi^2 r^2$, und mit (4) ist $A = \pi r^2$. $\square$

Lemma 3.5 Für $k, l \in \mathbb{N}_0$ gelten die folgenden so genannten „Orthogonalitätsbedingungen“ der Produkte von $\cos$ und $\sin$.

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin lt \, dt = 0, \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos lt \, dt = \int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ \pi & \text{falls } k = l \geq 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos lt \, dt = 2\pi \text{ und } \int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt \, dt = 0 \quad \text{falls } k = l = 0. \quad (12)$$

Beweis. Den Fall $k = l = 0$ sieht man direkt, für die beiden Fälle $l = 0 \neq k$ und $k = 0 \neq l$ folgen die Gleichungen sofort aus den Beziehungen $\int_0^{2\pi} \sin nt \, dt = \int_0^{2\pi} \cos nt \, dt = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Seien also $k, l \geq 1$. Für das unbestimmte Integral $\int \cos kt \sin lt \, dt$ gilt

$$\int \cos kt \sin lt \, dt = \begin{cases} \frac{1}{k^2 - l^2} (k \sin kt \sin lt + l \cos kt \cos lt) & \text{falls } k \neq l, \\ \frac{1}{2k} \sin^2 kt & \text{falls } k = l, \end{cases} \quad (13)$$

wie man leicht durch Ableitung der rechten Seiten nach t nachrechnet, was jeweils den Term unter dem Integral ergibt. Daraus folgt (10). Entsprechend ist

$$\int \cos kt \cos lt \, dt = \begin{cases} \frac{1}{l^2 - k^2} (l \cos kt \sin lt - k \sin kt \cos lt) & \text{falls } k \neq l, \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{4k} \sin 2kt & \text{falls } k = l, \end{cases} \quad (14)$$

Auch hier rechnen wir einfach nach, indem wir die rechte Seite nach t ableiten; für den Fall $k = l$ müssen wir zusätzlich die Additionstheoreme [2, §14] bemühen, um mit $\cos 2kt = \cos^2 kt - \sin^2 kt$ zu erkennen, dass

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2kt = \frac{1}{2} \underbrace{(1 - \sin^2 kt + \cos^2 kt)}_{=\cos^2 kt} = \cos^2 kt.$$

Ganz ähnlich sehen wir das dritte Integral,

$$\int \sin kt \sin lt \, dt = \begin{cases} \frac{1}{l^2 - k^2} (k \cos kt \sin lt - l \sin kt \cos lt) & \text{falls } k \neq l, \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4k} \sin 2kt & \text{falls } k = l, \end{cases} \quad (15)$$

hier für $k = l$ mit der Gleichung $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2kt = \frac{1}{2} \underbrace{(1 - \cos^2 kt + \sin^2 kt)}_{=\sin^2 kt} = \sin^2 kt$. $\square$

Danksagung. Dank an einen sehr aufmerksamen anonymen Leser, der einige Tipp- und Rechenfehler der ersten Version dieses Beitrags entdeckte.

Literatur

- [1] T. Bröcker: *Analysis II*. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 1995
- [2] O. Forster. *Analysis I*. Vieweg, Braunschweig
- [3] O. Forster: *Analysis 2*. Vieweg, Braunschweig
- [4] S. Hildebrandt & A. Tromba: *Kugel, Kreis und Seifenblasen. Optimale Formen in Geometrie und Natur*. Birkhäuser Verlag Basel 1996
- [5] Gustav Schwab: *Sagen des klassischen Altertums*. Insel Verlag, Frankfurt am Main 2001. <http://www.textlog.de/41193.html> (20.10.2009)
- [6] E. Zeidler (Hrsg.): *Teubner Taschenbuch der Mathematik. Teil I*. B.G. Teubner, Leipzig 1996

Hagen, den 20. Oktober 2009
korrigierte Version: 29. Juli 2021

Prof. Dr. Andreas de Vries
FH Südwestfalen University of Applied Sciences
Haldener Straße 182
D-58095 Hagen
e-Mail: de-vries.andreas@fh-swf.de